ファジィ相互情報量に関する研究

A Study on Fuzzy Mutual Information Amount

山　下　洋　史
Hiroshi Yamashita

Keywords: information theory, fuzzy entropy, standardized fuzzy entropy, randomness, fuzziness

目　次

1. はじめに

日頃，我々が交わす会話から発せられる情報の多くは，何らかのあいまいさを含んでおり，これは「ファジィ・メッセージ」[1] として位置づけられるものであろう。例えば，明日の天気に関して「降水確率 60%で，推定降水量は 10 mm なので，傘を持っていった方がいいよ」と言うことは非常に少なく，「明日は天気がくずれそうなので，傘を持っていった方がいいよ」という言い方が普通である。後者の言い方には，①偶然性に関するあいまいさ（ランダムネス）と②漠然性に関するあいまいさ（ファジィネス）の両面が介在し，筆者 [2] はこれを「あいまいさの二面性」と呼んでいる。

①の「ランダムネス」は，本当に天気がくずれるのか，くずれないのかについてのあいまいさを意味する。すなわち，天気がくずれる確率が高いが，くずれないとも言いきれない（確率が 0 でない）のである。このように，上記のメッセージが，ある確率に支配されていることから，偶然性に関するあいまいさがそこに介在していることがわかる。

②の「ファジィネス」は，「天気がくずれる」とは雨なのかくもりなのか，はたまた雪なのか，みぞれなのか…についてあいまいであることを意味する。これは，「天気がくずれる」とはどう

いう意味なのかが漠然としているという点で，漠然性に関するあいまいさに相当する。

筆者 [1]，[2] は，このようなあいまいさの二面性に注目し，ファジィ・メッセージとクリスプ・メッセージの比較を行っている。その際，ファジィ・メッセージの特性を定量的に捉えるべく，ファジィ集合に対するメンバーシップ値を導入し，これによって構成されるメンバーシップ・ベクトルを用いてファジィ・メッセージの定義を行っている。さらに，ファジィ・メッセージがクリスプ・メッセージを包含すること，言い換えればクリスプ・メッセージがファジィ・メッセージの特別な場合として位置づけられることを示している。

本研究では，上記のようなあいまいさの二面性を持つファジィ事象において，確率まわりのエントロピー（シャノン・エントロピー）と，ファジィ・メッセージが与えられたという条件のもとでの「条件つきファジィ・エントロピー」との差をとることにより，新たに「ファジィ相互情報量」を提案する。この「ファジィ相互情報量」は，我々がファジィ・メッセージを受信することで，出力情報のうちどれだけの情報量を予め得ることが可能であるかについて示す指標であり，ファジィ事象におけるファジィ・メッセージ M の果たす役割の大きさを定量的に表している。

そこで，まず本論の基礎となる各種情報量（エントロピー）を概観し，次にランダムネスとファジィネスという「あいまいさの二面性」を持つファジィ事象を定量的に捉えるためのいくつかの指標，とりわけファジィ・エントロピーとファジィ条件つきエントロピーの特性について検討する。その上で，これらの指標を用いて，新たに「条件つきファジィ・エントロピー」と「ファジィ相互情報量」の定式化を試みる。これにより，上記のファジィ事象において，ファジィ・メッセージ M がランダムネスとファジィネスをどれだけ吸収し，あいまいさを低減させるかについての新たな視点を提示する。

2. 通信路モデルにおける各種情報量

2.1 情報量（シャノン・エントロピー）

ここでは，確率 p_i で生ずる事象 x_i を考えることにしよう。このとき，ある事象 x_j が起こったということを我々が知ることに得られる情報量 E_i は，次のように定義される。

$$E_i = \log(1/p_i) = -\log p_i \qquad (1)$$

したがって，事象全体 $X(=\{x_i\})$ について考えれば，平均として(2)式の情報量を得ることが期待され，これはシャノン・エントロピーに相当する。この（平均）情報量 E は，すべての確率 p_i が $1/n$ で等しいときに $E = \log n$ (bit) で最大となり，この場合何が起こるかが全くわからない状態を意味する。

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(1/p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i \qquad (2)$$

最も単純な2値信号 $(n = 2)$ の場合，情報量 E (bit) は，

$$E = p_1 \cdot \log(1/p_1) + p_2 \cdot \log(1/p_2) \tag{3}$$

として表され，その値は**表1**のようになる。

(2)式や(3)式の平均情報量 E は，一般に「情報量」と呼ばれる。したがって，単に「情報量」といった場合，通常この平均情報量 E を意味することが普通である。

表1　2値信号 (n = 2) の場合の情報量 E (bit)

確率 p_1	確率 p_2	情報量 I
0	1	0
1/8	7/8	0.544
1/4	3/4	0.811
1/3	2/3	0.918
2/5	3/5	0.971
4/9	5/9	0.991
1/2	1/2	1

2.2　通信路行列

図1の通信路において，入力シンボル x_i が入力されたときに，出力シンボル y_j が生起する条件つき確率を，記号 p_{ij} で表すことにする。この条件つき確率 p_{ij} を，(4)式のように配置した行列が，通信路行列 (channel matrix) であり，推移確率行列とも呼ばれる。本研究では，この通信路行列を $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ で表すことにする。**図1**のような通信路は，通信路行列で完全に記述される [3]。

通信路行列（条件つき確率）

入力シンボル x_i ⟶ $\boxed{\boldsymbol{P} = (p_{ij})}$ ⟶ 出力シンボル y_j

図1　通信路

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

この通信路において，入力シンボルの生起確率 a_i（入力確率）と出力シンボルの生起確率 b_j（出力確率）を要素とするベクトルを，本研究ではそれぞれ入力確率ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_m)$，出力確率ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_j, \cdots, b_n)$ と呼ぶことにする。このとき出力確率 b_j は，入力確率 a_i と条件つき確率 p_{ij} を用いれば，

$$b_j = a_1 \cdot p_{1j} + a_2 \cdot p_{2j} +, \cdots, + a_m \cdot p_{mj} = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_{ij} \tag{5}$$

として表される。

一方，出力シンボル y_j が受信されたという条件のもとでの入力シンボル x_i の条件つき確率 $p(x_i/y_j)$ は「後向きの条件つき確率」と呼ばれ，

$$p(x_i/y_j) = a_i \cdot p_{ij}/b_j \tag{6}$$

となる。

2.3 条件つきエントロピーとあいまい度

前述のように通信路では，入力シンボルと出力シンボルはそれぞれ a_i, b_j の確率で生起する。したがって，入力情報を全く知らなければ，出力シンボルの有するエントロピー $H(Y)$ は，

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \log b_j \tag{7}$$

であり，これが出力シンボルを知ったときに得られる情報量となる。

しかしながら，もし入力シンボルが何であるかを知っていれば，そのときに出力シンボルの有するエントロピーは，入力シンボルが x_i であるという条件のもとでの出力シンボルの条件つきエントロピー $H(Y/x_i)$ となり，下式のように表される。

$$H(Y/x_i) = -\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot \log p_{ij} \tag{8}$$

同様に，出力情報を全く知らない場合，入力シンボルの持つエントロピー $H(X)$ は，

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \log a_i \tag{9}$$

であるが，出力シンボルが y_j であるということを知ったもとでの入力シンボルの条件つきエントロピー $H(X/y_j)$ は，後向きの条件つき確率 $p(x_i/y_j)$ を用いて，

$$H(X/y_j) = -\sum_{i=1}^{m} p(x_i/y_j) \cdot \log p(x_i/y_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \cdot p_{ij}}{b_j} \log \frac{b_j}{a_i \cdot p_{ij}} \tag{10}$$

として表される。

さらに，上記の前向きと後向きの条件つきエントロピーの平均を考えることができ，これらはそれぞれ Y の X に関するあいまい度 $H(Y/X)$（前向きのあいまい度），X の Y に関するあいまい度 $H(Y/X)$（後向きのあいまい度）と呼ばれる。

$$\begin{cases} H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot H(Y/x_i) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log p_{ij} & (11) \\ H(X/Y) = -\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot H(X/y_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log \dfrac{b_j}{a_i \cdot p_{ij}} & (12) \end{cases}$$

2.4 相互情報量

入力情報を全く知らないときの出力シンボルの情報量（エントロピー）が$H(Y)$であり，入力シンボルがx_iであることを知ったもとで出力シンボルがy_jであることを知ったときに得られる情報量は$H(Y/X)$であることから，入力情報を知ることによって平均として，

$$I(Y;X) = H(Y) - H(Y/X) \tag{13}$$

の情報が予め得られていたと考えることができる。この情報量$I(Y;X)$は，（前向きの）「相互情報量」と呼ばれる。

（前向きの）相互情報量は，下記のように変換することができる。

$$\begin{aligned} I(Y;X) &= H(Y) - H(Y/X) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \log b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot H(Y/x_i) = -\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \log b_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log p_{ij} \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log b_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log \frac{p_{ij}}{b_j} \end{aligned} \tag{14}$$

また，後向きの相互情報量$I(X;Y)$を考えることができ，これは入力シンボルがx_iであることを知ったときの情報量のうち，出力シンボルがy_jであることを知ることによって予め出力シンボルから得られていた分の情報量を意味する。後向きの相互情報量$I(X;Y)$は，下記のように変換することができ，前向きの相互情報量$I(Y;X)$と等しい。

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X/Y) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \log a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot H(X/y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \log a_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log \frac{b_j}{a_i \cdot p_{ij}} \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log a_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log \frac{b_j}{a_i \cdot p_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot p_{ij} \cdot \log \frac{p_{ij}}{b_j} \\ &= I(Y;X) \end{aligned} \tag{15}$$

3. 人間の情報処理過程の偶然性と漠然性

人間の情報処理過程には，常に何らかの情報のあいまいさが介在しているはずである。例えば，我々は今日の天候や天気予報の情報を基に「明日は天気がくずれそう」といった推論を行い，それをメッセージ（ファジィ・メッセージ）として発信する。その際，本当に天気が「くずれる」のか「くずれないのか」についてあいまい（不誠実）である。これは天気がくずれる確率が高い

が，絶対にくずれないわけではない（確率が 0 でない）ことを意味する。このようにある確率に支配されていることは，上記のメッセージに「偶然性」に関するあいまいさが介在していることを表している。

さらに，「天気がくずれる」とは雨なのか曇りなのか雪なのかについてもあいまい（不明確）である。これは，「天気がくずれる」の意味があいまいなことを示しており，その意味が漠然としているという点で，「漠然性」に関するあいまいさが介在していると考えることができる。このように，我々の思考・判断・メッセージには，偶然性と漠然性の両面でのあいまいさが介在しているのである。

それでは，このように上記の漠然性（ファジィネス）と偶然性（ランダムネス）というあいまいさの両面を持った人間の情報処理過程を捉えるには，どのような方法があるのであろうか？

こうしたあいまいさを有する情報処理過程を，西川ら [4] は入力情報 u を出力情報 v に変換する「フィルター機構」として位置づけている。ここで，入力情報を刺激（stimulus)，出力情報を反応（response）と考えれば，図 2 のように人間の情報処理過程は，伝統的な刺激—反応モデル（S-R モデル）のブラック・ボックス問題に帰着する。S-R モデルは，測定可能な刺激と反応に注目して両者の関係を捉えようとするものであり，両者の間の情報処理過程はブラック・ボックスとして位置づけられる。

フィルター機構

入力情報 u（刺激 S）→ ブラック・ボックス → 出力情報 v（反応 R）

図 2　人間の情報処理過程

人間の思考・行動を考える上で，こうしたブラック・ボックスの役割は大きいが，その把握はきわめてむずかしい。それは，ブラック・ボックスでの複雑な情報処理における偶然性としての「ランダムネス」と漠然性としての「ファジィネス」との二面性に起因するのではないかと思われる [2]。

したがって，人間の情報処理過程を捉える上で，そのあいまいさを構成するランダムネスとファジィネスへのアプローチが重要な課題となる。こうした課題に対して，ランダムネスを生起確率 p_i によって，また西川ら [4] は，ファジィネスをファジィ理論におけるメンバーシップ値 μ_i によって捉えるとともに，両者が複合した出力情報 v_i のあいまいさを「行動エントロピー」と呼び，ファジィ・エントロピー F により(16)式のように定式化している。その上で，(10)式の行動エントロピーを，人間の情報処理過程におけるあいまいさの二面性を総合的に表す指標として位置づけている。

$$F=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[-p_i\cdot\mu_i\cdot\log(p_i\cdot\mu_i)-p_1(1-\mu_i)\log\{p_1(1-\mu_i)\}\right] \qquad (16)$$

ただし，n：サンプル数

ここで，もしnが一定の議論をするならば，$1/n$は定数となるので除去して考えることができ，これをp_iとμ_iについて整理すると(17)式のように変換される。

$$F = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i \tag{17}$$

$$\text{ただし，} H_i = -\mu_i \cdot \log \mu_i - (1-\mu_i)\log(1-\mu_i) \tag{18}$$

(17)式の右辺の第1項は偶然性（ランダムネス）に関するエントロピーを，また第2項は漠然性（ファジィネス）に関するエントロピーをそれぞれ表している。第1項の偶然性に関するエントロピーは，「何が起こるのか？」についてのあいまいさの大きさを示しており，シャノンの情報理論における平均情報量（＝シャノン・エントロピー）に相当する。したがって，何が起こったかを知ったときに得られる情報量の平均を意味する。

一方，第2項は「サンプルiが，ファジィ集合に属するのか属さないのか？」についてのサンプルi別のエントロピーH_iを選択確率p_iで重みづけした平均であり，漠然性（ファジィネス）に関するエントロピーの平均として位置づけることができる。本研究では，5節の「基準化ファジィ・エントロピー」を除いて，上記のようにnが一定という条件のもとでの議論を展開していくことになる。

このように人間の情報処理過程には，偶然性と漠然性に関する「あいまいさの二面性」が介在しており，ファジィ・エントロピー（行動エントロピー）はこれらの両面を総合的に捉える際の有力な指標となる。

4. 偶然性と漠然性に関するあいまいさの指標

ここでは，偶然性と漠然性の両面のあいまいさを持ったファジィ事象を記述するための5つの指標について，筆者の従来の研究 [5] に基づき概説していくことにする。

4.1 確率まわりのエントロピーE（通常のシャノン・エントロピー）

これは，例えばコインを投げて表が出るかもしれないし，裏が出るかもしれないというような「何が起こるのか？」についてのあいまいさの測度であり，偶然性に関するあいまいさの指標として位置づけられる。したがって，このあいまいさは確率p_iによって(19)式のように定義され，シャノンの情報理論における平均情報量（＝シャノン・エントロピー）に相当する。

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(1/p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i \tag{19}$$

確率まわりのエントロピーEは，すべての要素の確率p_iが$1/n$で等しいとき$\log n$で最大となり，このとき何が起こるのか全くわからない状態であることを示している。

4.2 サンプル i 別のメンバーシップ値まわりのエントロピー H_i

このエントロピー H_i は，サンプル i がファジィ集合 A に属するのか属さないのかといった意味面でのあいまいさを表す指標であり，例えば，ある本が「おもしろい本の集合」に属するか否かのあいまいさの大きさを示している。言い換えれば，意味の漠然性に関するあいまいさの指標であり，サンプル i がファジィ集合 A に属する度合（メンバーシップ値 μ_i）と，その補集合に属する度合 $(1-\mu_i)$ の間のエントロピーとして，前述の(18)式のように定式化される。

メンバーシップ値まわりのエントロピー H_i は，メンバーシップ値 μ_i が 1/2 のとき $\log 2 = 1$ で最大となり，このときファジィ集合に属しているのか否かが最も不明確であることを示している。

4.3 サンプル全体としてのメンバーシップ値まわりのエントロピー H

上記のように，サンプル i ごとに定式化されたメンバーシップ値まわりのエントロピー H_i をサンプル i の選択確率 p_i で重みづけすれば，サンプル全体としての漠然性の平均を考えることができる。(20)式は，サンプル全体として，ファジィ集合 A に属するか否かがどれだけあいまいさであるかを示しており，サンプル全体としての漠然性に関するあいまいさの指標として位置づけられる。

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \{-\mu_i \cdot \log \mu_i - (1-\mu_i) \log(1-\mu_i)\} \end{aligned} \tag{20}$$

このエントロピー H は，すべてのメンバーシップ値 μ_i が 1/2 のとき $\log 2 = 1$ で最大となり，サンプル全体がファジィ集合 A に属しているのか否かについて最も不明確であることを示している。

4.4 ファジィ・エントロピー F（行動エントロピー [4]）

ここまでは，偶然性と漠然性のそれぞれに関するあいまいさの指標について考えてきたが，これらのあいまいさの両面を考慮した総合的なあいまいさの指標が(16)式または(17)式のファジィ・エントロピー（行動エントロピー）である。これは(21)式のように確率まわりのエントロピー E とメンバーシップ値まわりのエントロピー H の和に分解される。

$$F = E + H \tag{21}$$

人間が意思決定を行う際の総合的なあいまいさを表すファジィ・エントロピー F は，すべての要素の確率 p_i が $1/n$ で等しく，かつすべてのメンバーシップ値 μ_i が 1/2 のとき，$\log n + \log 2 = \log n + 1$ で最大となり，このとき，何が起こるのか全くわからず，ファジィ集合に属しているのか否かが最も不明確であることを示している。

表2　ファジィ・エントロピーの特性 [2]

特性	満足するか否か
拡張可能性	(17)式の場合，無条件に満足
対称性	p_i と μ_i が連動して i に関してともに置換されれば満足
連続性	$p_i > 0$, $\mu_i > 0$ の領域で無条件に満足
最大値	すべての p_i が $1/n$，μ_i が 1/2 で最大
劣加法性	積事象のメンバーシップ値を min 演算によって定義すれば満足（max 演算でも満足するが，min 演算の方が自然である）
加法性	すべての μ_i が 0 or 1 のときのみ満足（この場合，通常のエントロピーと等しい）→ 一般には満足しない
単調性	(17)式の場合，μ_i の値がすべて等しければ満足
分岐	すべての μ_i が 0 or 1 のときのみ満足（この場合，通常のエントロピーと等しい）→ 一般には満足しないない

通常のエントロピーが持つ特性（拡張可能性・対称性等 [6]）は，ファジィ・エントロピーにおいても満足するか否かについて整理すると，**表2**のようになる [2]。

表2より，単独の事象および複合事象で不等号を要求する特性については，通常のエントロピーが持つ特性をファジィ・エントロピーにおいても満足するか，あるいはその拡張形として満足するが，複合事象で，かつ等号を要求する特性については満足しないことがわかる。

4.5　ファジィ事象の確率

ファジィ理論では，漠然性を内包した確率として，ファジィ事象 B の確率 $P(B)$ が(22)式のように定義されている。例えば，サイコロを振ったときに「大きい目の出る確率」のように，確率自体の偶然性に関するあいまいさと，「大きい目」とは何かについての意味面でのあいまいさ（漠然性）が複合した確率である。

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \mu_i \tag{22}$$

偶然性と漠然性の両面を考慮したあいまいさの指標として，ファジィ・エントロピーとは別に，ファジィ事象の確率まわりのエントロピー Q を考えることができ，ファジィ事象 B の確率 $P(B)$ とその補事象の確率 $P(\overline{B})(=1-P(B))$ を用いて(23)式のように表される。

$$Q = -P(B)\log P(B) - P(\overline{B})\log P(\overline{B}) \tag{23}$$

ファジィ事象の確率まわりのエントロピーは，ファジィ事象 B の確率 $P(B)$ が 1/2 のとき（この場合，補事象の確率も 1/2 となる），$\log 2 = 1$ で最大となり，上記の例でいえば，大きい目が出るのか否かが最も不明確であることを示している。

5. 基準化ファジィ・エントロピー

ここまでの議論のように，分析対象となるサンプルが一定のもとでは，ファジィ・エントロピーにおいてサンプル数nを除去して考えることができるが，サンプル数が異なる複数の離散型確率分布の間で，それらのあいまいさを比較可能にするためには，何らかの方法でサンプル数nによる基準化を行う必要がある。

例えば，$n=3$と$n=5$の場合を考えてみると，両者ともすべての選択確率が$1/n$，すべてのメンバーシップ値が1/2であるとすれば（このときFは最大となる），前者は$F=\log 3+\log 2 \fallingdotseq 2.585$，後者は$F=\log 5+\log 2 \fallingdotseq 3.322$であり，サンプル数$n$の増加にともない$F$の値も増加する。しかし，両者とも，どれを選択するのかが全くあいまいで，かつ各サンプルがファジィ集合に属するのか否かも最もあいまいな状態であり，相対的には同等の（最大の）あいまいさを有していると考えられる。

西川らの(16)式の行動エントロピー（ファジィ・エントロピー [2]）は，サンプル数nの違いを考慮しているが，これは(17)式をnで除したものであり，サンプル1個当りのファジィ・エントロピーの平均として位置づけることができる。しかし，上記の例でいえば，$n=3$のとき，この(16)式の値は$(\log 3+\log 2)/3 \fallingdotseq 0.862$，一方$n=5$のときは$(\log 5+\log 2)/5 \fallingdotseq 0.664$となり，前者の場合の方が大きい値となる。すなわち，同じようにすべての選択確率が$1/n$で，すべてのメンバーシップ値が1/2という最もあいまいな状態であっても，nの増加にともない(16)式の値は単調に減少する。

ここで，(17)式のファジィ・エントロピーを第1項と第2項に分けて考えてみると，第1項はすべての選択確率が$1/n$（偶然性に関するあいまいさが最大）のとき$\log n$で，nの増加にともない単調に増加するが，第2項はすべてのメンバーシップ値が1/2（漠然性に関するあいまいさが最大）のとき$\log 2=1$で，nの大きさに依存しない。そこで筆者 [7] は，偶然性に関するあいまいさが最大のときの値で(17)式の第1項のみを除することにより，(24)式のような「基準化ファジィ・エントロピー」Sを提案している。具体的には，(17)式の第1項を$\log n$で除することになり，ここでいう「基準化」とはFに対するnの増加の影響を除去することを意味する。これは，情報理論における「正規化シャノン・エントロピー」に相当し，「相対エントロピー」とも呼ばれる [6]。一方，第2項は上記のようにnに依存しないため，基準化を行っていない。

$$S=-\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i / \log n+\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i \tag{24}$$

これにより，サンプル数が異なる複数の離散型確率分布の間でも，偶然性と漠然性に関する総合的なあいまいさ（ファジィ・エントロピー）が比較可能になる。さらに，対数の底の交換公式を用いれば，(24)式は(25)式のように変換される [7]。

$$S=-\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot\log p_i/\log n+\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot H_i=-\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot\log_n p_i+\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot H_i \tag{25}$$

(25)式は，サンプル数 n によって，第1項の偶然性に関するあいまいさの対数の底が変化することを示すものである。すなわち，2値信号（$n=2$）において選択確率がそれぞれ 1/2 のとき，第1項が 1 bit であるのと同様に，サンプル数が n においてもすべての選択確率が $1/n$ のとき 1 bit となる。

ここで注意すべきことは，情報理論において対数の底を2とした場合の単位が bit，10 としたときが Hartley，e としたときが nat であるが，当初の単位が bit であれば，サンプル数 $n=10$ で基準化を行って対数の底が 10 となったとしても，その単位は Hartley でなく，あくまでも bit であるというところにある。

これに対して，第2項の対数の底は n の大きさに依存せず一定であり，対数の底が第1項の偶然性に関するあいまいさのみ「変数」となることは非常に興味深い特性であろう [7]。

6.「条件つきファジィ・エントロピー」の提案

ファジィ理論において，ファジィ・メッセージ M が与えられたもとで，事象 x_i が生起する確率，すなわち「ファジィ条件つき確率」q_i は，(26)式のように定義されている。例えば，サイコロを振ったときに6の目が出る確率を考えた場合，ファジィ・メッセージが与えられていなければ，その確率は 1/6 であるが，もし「大きい目が出た」というファジィ・メッセージが与えられたとすれば，その確率は 1/6 よりも大きい値となることが予想される。この例でいえば，(26)式のファジィ条件つき確率 q_i は「大きい目の集合」というファジィ集合にそれぞれの目が属する度合（メンバーシップ値 $\mu_{i'}$）で，p_i を重みづけした式となっており，これにより6や5の目が出る確率が 1/6 よりも大きい値となるのである。

$$q_i=\frac{\mu_i\cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n}\mu_{i'}\cdot p_i} \tag{26}$$

ファジィ理論では，このファジィ条件つき確率を用いて「ファジィ条件つきエントロピー」[8] が定義されており，それは(27)式のように表される。

$$H(X/M)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i\cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n}\mu_{i'}\cdot p_i}\log\frac{\mu_i\cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n}\mu_{i'}\cdot p_i} \tag{27}$$

(27)式のファジィ条件つきエントロピーは，（2）式のシャノン・エントロピーの確率 p_i を，ファジィ条件つき確率 q_i に置き換えた式であり，基本的には（2）式と同様に偶然性（ランダムネス）に関するあいまいさを表した式である。

本研究ではこうした偶然性（ランダムネス）のみならず，漠然性（ファジィネス）に関するあ

いまいさを加味した指標を新たに考えることにする。そこで，(27)式の偶然性に関するあいまいさに，(20)式の漠然性に関するあいまいさを加えることにより，ファジィ事象におけるあいまいさの二面性（偶然性と漠然性）の両面を考慮した条件つきのエントロピーを定義し，これを「条件つきファジィ・エントロピー」(「ファジィ条件つきエントロピー」ではない点に注意）と呼ぶことにする。

$$H(X/M) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i \cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n} \mu_{i'} \cdot p_i} \log \frac{\mu_i \cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n} \mu_{i'} \cdot p_i} + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i(M_i) \tag{28}$$

(28)式の第1項は(27)式のファジィ条件つきエントロピーであり，ファジィ・メッセージMが与えられたもとでの偶然性（ランダムネス）に関するあいまいさの大きさを表している。第2項は，メンバーシップ値まわりのエントロピーの平均Hであり，漠然性に関するあいまいさの大きさを示している。すなわち，(28)式は(17)式（ファジィ・エントロピー）の第1項の確率p_iを(26)式のファジィ条件つき確率に置き換えた式であり，そういった意味で(28)式は「ファジィ条件つき確率を用いたファジィ・エントロピー」という位置づけとなるのである。

7. 「ファジィ相互情報量」の提案

本研究では，ここまでの議論をふまえて，(13)式の相互情報量に対し，漠然性に関するあいまいさを加味することにより，偶然性のみに焦点を当てた従来の相互情報量を，偶然性と漠然性の両面を考慮した相互情報量へと拡張することを試みる。前述のように，相互情報量は，入力情報（この場合ファジィ・メッセージに相当する）を全く知らないときの出力情報のエントロピーと，入力情報を知ったもとで（条件つき）の出力情報のエントロピーとの差であり，出力情報のあいまいさ（エントロピー）のうち予めどれだけのあいまいさを入力情報が奪い取っているか，言い換えれば出力情報のうち予めどれだけの情報量を得ていたかを示している。

本研究の問題設定において，出力情報の有するエントロピーは，集合$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$のうちどの事象$x_i$が生起するかについてのあいまいさ（エントロピー），すなわち確率まわりのエントロピー$H(X)$に，また入力情報（ファジィ・メッセージM）を知ったもとでの出力情報のエントロピーは，条件つきファジィ・エントロピー$F(X/M)$に相当するため，偶然性と漠然性の両面を考慮した相互情報量はこれらの差として，(29)式のように定式化することができる。本研究では，これを「ファジィ相互情報量」と呼ぶことにする。

$$\begin{aligned} I(X;M) &= H(X) - F(X/M) \\ &= H(X) - \{H(X/M) + H(M)\} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i \cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n} \mu_{i'} \cdot p_i} \log \frac{\mu_i \cdot p_i}{\sum_{i'=1}^{n} \mu_{i'} \cdot p_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i(M_i) \end{aligned} \tag{29}$$

ここに，$H(M)$ はメンバーシップ値まわりのエントロピーを意味する。もし，入力情報（ファジィ・メッセージ）が与えられていなければ，何が起こるのかについての情報を全く持たないため，確率まわりのエントロピー $H(X)$ のあいまいさを有していることになる。しかしながら，ファジィ・メッセージが与えられていれば，何が起こるのか（偶然性）についてのあいまいさはファジィ条件つきエントロピー $H(X/M)$ となり，もしファジィ・メッセージ M が有効なものであれば，$H(X) > H(X/M)$ となる。

ただし，ファジィ・メッセージには意味面でのあいまいさ（漠然性）が含まれているため，条件つきファジィ・エントロピー $F(X/M)$ にも，$H(X/M)$ のみならず漠然性に関するエントロピー $H(M)$ が加わることになり，$H(M)$ の大きさによっては $H(X)-H(X/M) > 0$ であっても $I(X;M) < 0$ となることも起こりうる。この場合，ファジィ・メッセージが何を意味するかのあいまいさ $H(M)$ が大きいため，かえって意思決定のあいまいさが増大することを示している。この点が，従来の相互情報量との大きな違いであり，クリスプ・メッセージが偶然性に関するあいまいさを奪い取るだけであるのに対して，ファジィ・メッセージ M はそれを奪い取ったとしても，逆に漠然性に関するあいまいさを注入してしまうという性質を表している。

8. 簡単な数値例

本研究では，ここまで「条件つきファジィ・エントロピー」および「ファジィ相互情報量」を提案してきたが，簡単な数値例により，これらが示す「情報のあいまいさ」について検討していくことにしよう。

そこで，まず天気予報（ファジィ・メッセージ）を聞く前の明日の天候（晴れ・曇り・雪・雨）に関して，**表3**のような生起確率 p_i を設定する。また，その天気予報が「明日は天気がくずれるでしょう」というメッセージであったと仮定し，これを「くずれた天気の集合」（境界があいまいなファジィ集合）に対するメンバーシップ値 $\mu_{i'}$ によって捉えることにする（**表3**）。

表3の数値例を(26)式に代入してファジィ条件つき確率 q_i を求めると，**表4**のような結果となり，曇り・雪・雨についての確率 (p_2, p_3, p_4) に比較してファジィ条件つき確率 (q_2, q_3, q_4) は，それぞれ増加していることがわかる。これは，入力情報（ファジィ・メッセージ M）が「明日は天気がくずれるでしょう」という天気予報であるため，晴れのファジィ条件つき確率 q_1 の値が0に減少したことによるものであり，現実に即した結果となっている。

表3　事象 i 別のメンバーシップ値 $\mu_{i'}$ と生起確率 p_i の簡単な数値例

事象 i	天候	メンバーシップ値 $\mu_{i'}$	Case A 確率 p_i	Case B 確率 p_i	Case C 確率 p_i	Case D 確率 p_i	Case E 確率 p_i
1	晴れ	0	0.9	0.5	0.4	0.35	0.4
2	曇り	0.5	0.05	0.25	0.3	0.3	0.2
3	雪	0.6	0	0.05	0.1	0.05	0.3
4	雨	1.0	0.05	0.2	0.2	0.3	0.1

表 4　分析結果 1：事象 i 別のファジィ条件つき確率 q_i

事象 i	天候	Case A 確率 q_i	Case B 確率 q_i	Case C 確率 q_i	Case D 確率 q_i	Case E 確率 q_i
1	晴れ	0	0	0	0	0
2	曇り	0.333	0.352	0.366	0.313	0.263
3	雪	0	0.085	0.146	0.063	0.474
4	雨	0.667	0.563	0.488	0.624	0.263

表 5　分析結果 2：条件つきファジィ・エントロピーとファジィ相互情報量

指　　標	Case A	Case B	Case C	Case D	Case E
シャノン・エントロピー	0.353	1.680	1.846	1.788	1.846
ファジィ条件つきエントロピー	0.918	1.298	1.442	1.198	1.524
条件つきファジィ・エントロピー	**0.962**	**1.568**	**1.806**	**1.513**	**2.001**
ファジィ相互情報量	**−0.609**	**0.112**	**0.040**	**0.276**	**−0.154**

さらに，このファジィ条件つき確率 q_i を用いて，条件つきファジィ・エントロピー $F(X/M)$ とファジィ相互情報量 $I(X;M)$ を求めた結果は，**表 5** の通りである。まず，条件つきファジィ・エントロピーの結果をファジィ条件つきエントロピーと比較すると，意味面でのあいまいさ（漠然性）を考慮した分だけ，前者は後者よりも大きい値となっていることがわかる。とりわけ，Case E は他の Case に比べて曇りと雪の確率が大きいため，その増分が大きくなっている。これは，曇りと雪という天候が，晴れや雨に比較して，「くずれた天気の集合」に属するか否かがあいまいである（意味面でのあいまいさが大きい）ためであり，漠然性の大きさを示しているものと考えられる。

次に，ファジィ相互情報量 $I(X;M)$ を見ると，Case D の値が最も大きくなっており，Case D の天気予報が最も有効性を発揮するという結果となっている。これは，Case D において偶然性に関するあいまいさ（シャノン・エントロピー）が大きく，かつ雨の確率が大きいために，天気予報というファジィ・メッセージを受信することにより，偶然性と漠然性の総合的なあいまいさが最も減少することを表す結果と考えられる。

一方，Case A と Case E ではファジィ相互情報量が負の値となっていることがわかる。これは，偶然性と漠然性の総合的なあいまいさがかえって増大することを示す結果である。ファジィ相互情報量は，$H(M)$ の大きさによっては $H(X)-H(X/M)>0$ であっても，$I(X;M)<0$ となりうることは前述の通りである。なぜなら，ファジィ・メッセージを受信する前は偶然性に関するあいまいさ $H(X)$ のみであるが，受信後はこれに「ファジィ・メッセージが何を意味するか」という意味面でのあいまいさ（漠然性）が加わるからである。すなわち，ファジィ条件つきエントロピー $F(X/M)$ には，$H(X/M)$ のみならず漠然性に関するエントロピー $H(M)$ が加わるため，ファジィ・メッセージが何を意味するかのあいまいさ $H(M)$ が大きい場合，かえって意思決定のあいまいさを増大させることになるのである。

以上の結果より，ファジィ相互情報量は人間や組織の情報処理過程におけるファジィ・メッセージの有効性を，偶然性と漠然性の両面から定量的に捉えた指標であることがわかる。

9. おわりに

本研究では，シャノンの情報理論における各種情報量（エントロピー）と，偶然性と漠然性の「あいまいさの二面性」を持つファジィ事象を定量的に捉えるためのいくつかの指標，とりわけファジィ・エントロピーとファジィ条件つきエントロピーの特性について検討した上で，これらの指標を用い，新たに「条件つきファジィ・エントロピー」と「ファジィ相互情報量」を提案した。前者の条件つきファジィ・エントロピーは，ファジィ・メッセージが与えられたという条件のもとでの，偶然性と漠然性の総合的なあいまいさを，また後者のファジィ相互情報量は，ファジィ・メッセージを受信することで，出力情報のうちどれだけの情報量を予め得ることができるかを，それぞれ示す情報量（エントロピー）である。これにより，ファジィ・メッセージMがファジィ事象において，偶然性（ランダムネス）と漠然性（ファジィネス）の総合的なあいまいさをどれだけ吸収し，我々にどれだけの情報量を与えるかについての新たな視点を提示した。

さらに簡単な数値例により，本研究で提案した「条件つきファジィ・エントロピー」および「ファジィ相互情報量」の示す「情報のあいまいさ」について検討した結果，これらの情報量（エントロピー）が，クリスプ・メッセージとファジィ・メッセージとの違いを端的に表し，人間や組織の情報処理過程においてファジィ・メッセージの果たす役割を定量的に捉えるための指標として有効性を発揮しうることを確認することができた。

参考文献

[1] 山下洋史：情報管理と経営工学，経林書房（1999）
[2] 山下洋史："ファジィ・エントロピーを用いた情報管理モデル"，明治大学商学論叢，Vo. 81, No. 1（1999）
[3] Abramson, N. 著，宮川洋訳：情報理論入門，好学社（1969）
[4] 西川智登，清水静江，宮本日出雄："意思決定過程における入力情報に対する判断力の構造"，日本経営システム学会誌，Vol. 9, No. 1, pp. 35-41（1992）
[5] 山下洋史："偶然性と漠然性に関するあいまいさの表現方法"，山梨学院短期大学「経営研究」，No. 3（1994）
[6] Klir, G. J. and Folger, T. A. 著，本多中二訳：ファジィ情報学，日刊工業新聞社（1993）
[7] 山下洋史："基準化ファジィ・エントロピーに関する研究"，日本経営システム学会誌，Vol. 17, No. 1, pp. 31-37（2000）
[8] 西田俊夫，竹田英二：ファジィ集合とその応用，森北出版（1978）